IL TEOREMA DI PITAGORA

Il più famoso teorema della geometria euclidea

INTRODUZIONE

Il **teorema di Pitagora** è uno dei più importanti teorema della geometria euclidea che stabilisce la relazione fondamentale tra i lati di un triangolo rettangolo.

Quello che conosciamo ai nostri giorni come *teorema di Pitagora* viene solitamente attribuito al filosofo e matematico greco Pitagora.

In realtà il suo enunciato, <u>ma non la sua dimostrazione</u>, era già noto anche a popoli precedenti:

- agli egizi
- ai babilonesi (lo sappiamo grazie al ritrovamento di una tavoletta d’argilla paleo-babilonese datata 1800-1600 a.C.)
- ne troviamo versioni anche in Cina ed in India.

La dimostrazione del teorema è invece con ogni probabilità successiva a Pitagora.

Ma chi era Pitagora?

- Pitagora fu una figura importante perché segnò il passaggio dalla matematica applicata alla matematica astratta, grazie all'introduzione di dimostrazioni fondate sul metodo deduttivo a partire da assiomi esplicitamente formulati.

Dettaglio dalla *Scuola di Atene* (1511) di Raffaello Sanzio raffigurante Pitagora

- Nacque a Samo nel 580 a.C.
- Fu discepolo di Talete
- Viaggiò molto e visitò molti luoghi (in particolare Egitto e Babilonia)
- Dopo aver abbandonato la sua patria per sfuggire alla dittatura di Policrate si stabilì a Crotone, dove fondò una comunità filosofico-religiosa
- Quando alla fine del VI sec. una sommossa cacciò i pitagorici da Crotone, Pitagora si rifugiò a Metaponto, dove poco dopo morì

I Pitagorici

- I seguaci di Pitagora in seguito alla sua morte diedero vita a nuove comunità: le più celebri furono quella di Tebe, fondata da Filolao, e quella di Taranto, fondata da Archita
- Si dividevano in acusmatici (= ascoltatori) e matematici
- Ripresero e continuarono gli studi del maestro, in ambito:
  - filosofico
  - matematico
  - astronomico

- La loro vita per certi aspetti era quasi monacale, in quanto prevedeva la comunione dei beni e l'osservanza di regole molto rigorose.
- Ecco come, secondo Giamblico (altro filosofo greco antico), i pitagorici concludevano la loro giornata: *"Nel tardo pomeriggio tornavano a passeggiare in gruppi di due o tre, per richiamare alla memoria le cognizioni apprese e per esercitarsi negli studi liberali. Dopo il passeggio facevano un bagno e andavano al banchetto comune. Al banchetto seguivano le libagioni e infine la lettura. Era consuetudine che leggesse il più giovane e che il più anziano stabilisse quello che si doveva leggere e come".*

I numeri: principio di tutto

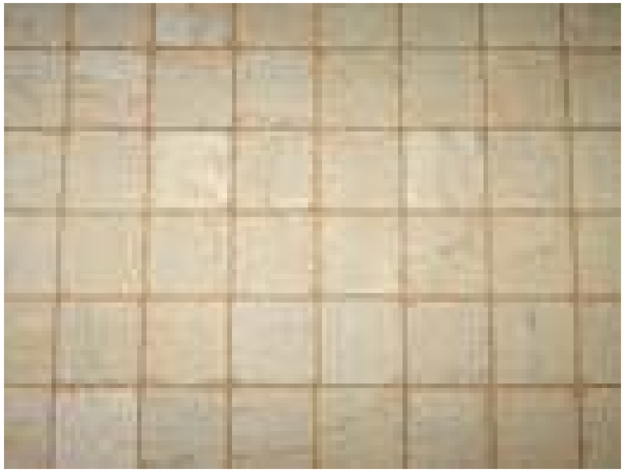
- Per i pitagorici i numeri (interi) erano il principio di ogni cosa: affermavano che tutto può essere ricondotto ad una relazione numerica
- Essi applicavano i numeri alla loro dottrina, suddivisa in:
  - Aritmetica
  - Musica
  - Geometria
  - Astronomia

Influenza delle idee pitagoriche

- L'influenza esercitata dai pitagorici risultò fondamentale per lo sviluppo della filosofia greca classica e del pensiero medioevale europeo
- Nel Rinascimento alcune idee dei pitagorici, come la Tetraktis o le proporzioni armoniche, vennero applicate anche in campo artistico.
- Nel Seicento, Copernico dichiarava che il suo sistema, con la Terra che gira attorno al Sole, era un sistema pitagorico e lo stesso Galileo veniva considerato "pitagorico", poiché Pitagora era visto come il padre delle scienze esatte.

Il teorema di Pitagora nell'antichità

- Si racconta che Pitagora abbia scoperto il suo teorema osservando delle piastrelle quadrate del pavimento di una sala d'aspetto
- La piastrella quadrata poteva essere divisa in due triangoli rettangoli, e l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa di uno dei due triangoli rettangoli è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti
- Il teorema vale per qualsiasi tipo di triangolo rettangolo, anche con cateti di lunghezza diversa

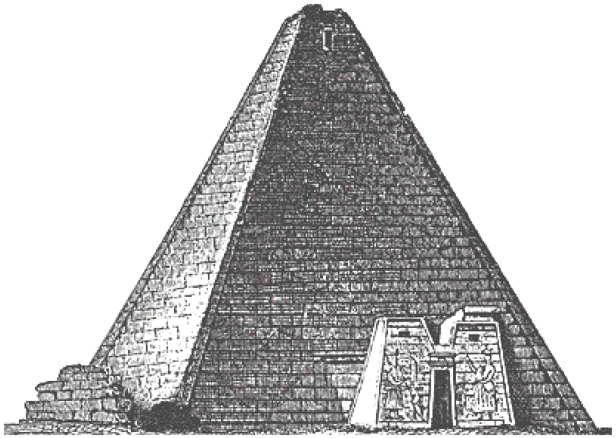


E adesso … UN PO’ di STORIA …

Vediamo nelle prossime diapositive un po’ di storia ...

... ovvero in che modo era conosciuto il teorema di Pitagora presso i popoli antichi

… presso gli antichi egizi



- I “geometri” egiziani per costruire l’angolo retto prendevano una fune di una certa lunghezza, la dividevano in 12 parti uguali facendo 13 nodi tutti alla stessa distanza, con dei paletti, poi, tendevano la corda (per questo venivano chiamati “tenditori di funi”) in modo da formare un triangolo che avesse i lati lunghi rispettivamente 3 volte, 4 volte e 5 volte la distanza fra due nodi successivi.
- L’angolo formato dai due lati più corti era un angolo retto.
- Gli altri antichi popoli, oltre agli Egizi, conoscevano questo sistema ma usavano altre terne di numeri; i Cinesi pare usassero le terne: 5,12,13 e 8, 15, 17

… tracce del teorema in Cina

- Tracce del teorema si possono trovare nel Chou Pei Suang Ching, uno dei più antichi libri cinesi di matematica che risale al 1500 a.C.
- Nel disegno (figura 1) si vede infatti un triangolo rettangolo di lati 3, 4 e 5 e un quadrato grande di lato 7=3+4
- Se raddoppiamo i quattro triangoli (figura 2) otteniamo il quadrato grande di lato 7
- L'area di questo quadrato grande è di 49 unità al quadrato. Per avere l'aerea del quadrato piccolo e scuro dobbiamo togliere l'area di quattro triangoli, ognuno dei quali ha area 6x4, cioè 49-24=25. Il lato misura dunque 5 unità ed è l'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti 3 e 4.

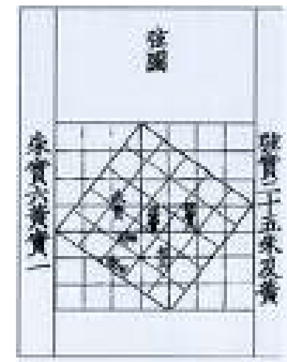


Figura 1

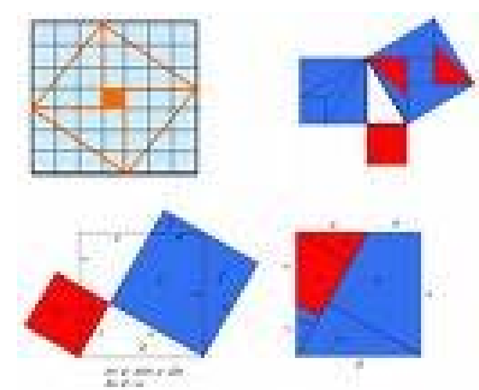
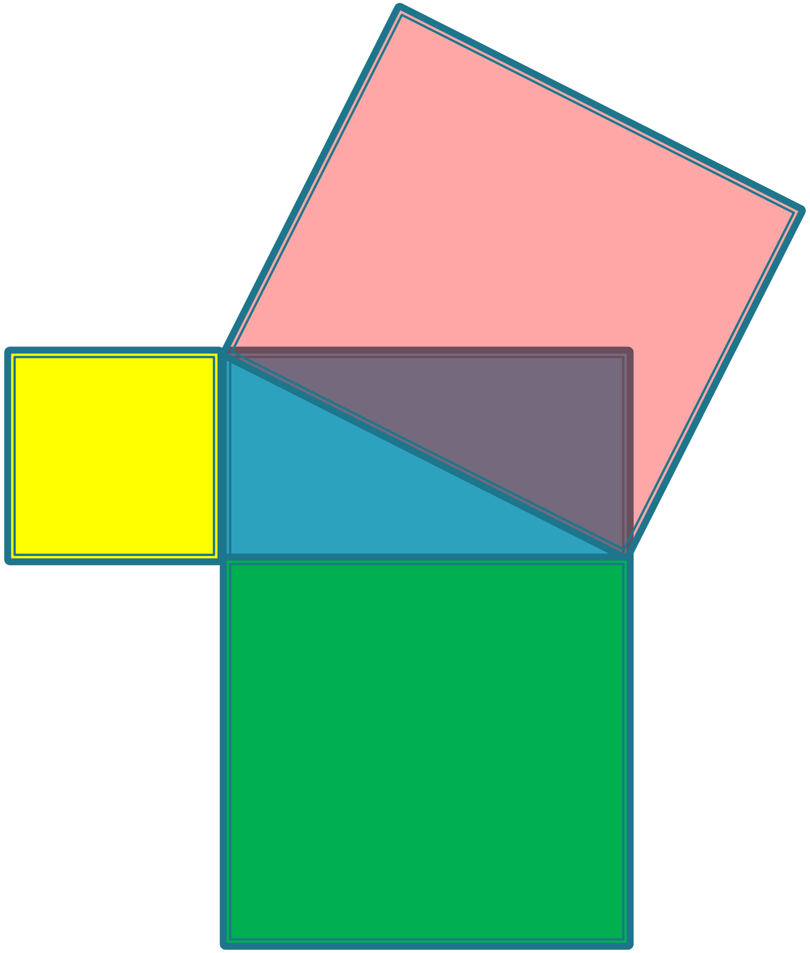


Figura 2

… tracce del teorema in India

- Il teorema di Pitagora in India si ricollega ai Sulbasutra, i testi che contenevano le istruzioni per la costruzione degli altari scritti tra l'800 e il 600 a.C.
- La definizione usata allora era la seguente: "La fune tesa per la lunghezza della diagonale di un rettangolo forma un'area pari alla somma di quella formata dal lato verticale e da quello orizzontale."



... tracce del teorema in Arabia

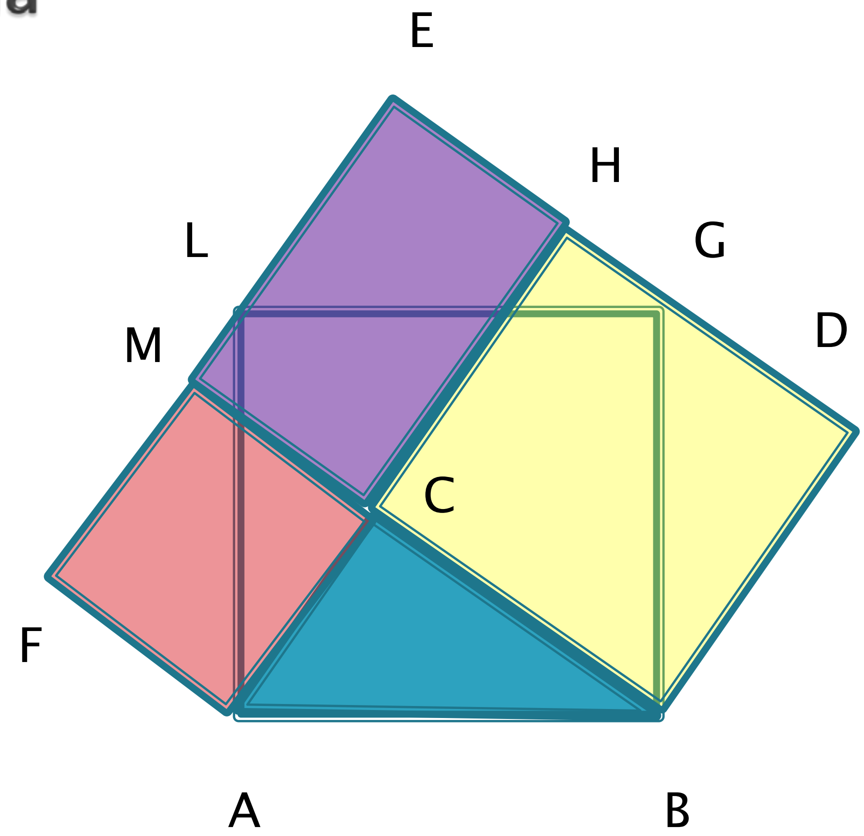
- La dimostrazione è di Thabit ibn Qurra Marwan al'Harrani (826-901)
- I triangoli ABC, CEH, CEM, BGD, EGL, AFL sono tutti equivalenti. Inoltre osserviamo che il poligono ABDEF può essere scomposto in due modi diversi:

  $ABDEF = AB^2 + BGD + EGL + AFL$

  $ABDEF = AC^2 + BC^2 + ABC + CEH + CEM$

- Dall'uguaglianza delle due relazioni e dall'equivalenza dei triangoli indicati ricaviamo:

  $AB^2 = AC^2 + BC^2$

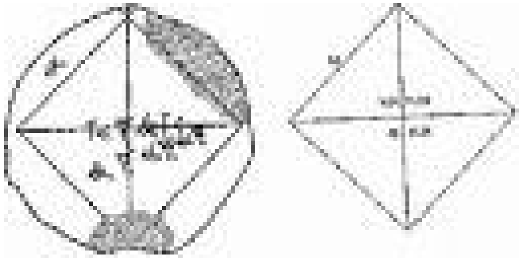


... tracce del teorema in Babilonia

- Il primo numero sulla diagonale è
  1;24,51,10
- E' in notazione sessagesimale, e il punto e virgola separa la parte intera da quella decimale.
- Nel sistema decimale risulterebbe:

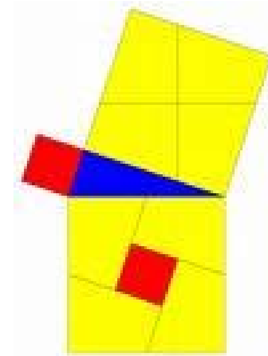
  $$1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$$

  che è un valore approssimato della radice di 2
- Se il lato del quadrato è 1, la diagonale è la radice quadrata di 12 più 12, cioè di 2.
- Se il lato è 30, sarà il prodotto di 30 per la radice quadrata di 2

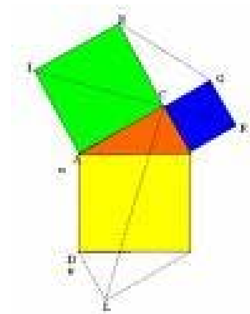


Le mille dimostrazioni del teorema di Pitagora

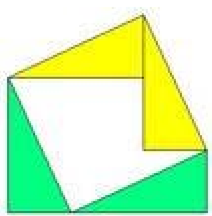
- Le dimostrazioni del teorema che sono state proposte sono diverse centinaia con molte varianti
- Il loro numero continua a crescere grazie a quelle che ancora oggi vengono scoperte da matematici sempre affascinati da questo teorema
- Tra le tante dimostrazioni ne troviamo alcune veramente curiose e simpatiche.



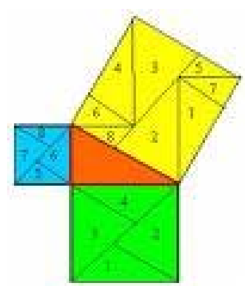
Henry Perigal



Nicky von Tempelhoff



G. B. Airy



Frédéric Ozanam

Terne numeriche particolari – Le terne pitagoriche

Consideriamo ora queste terne: 3, 4 e 5; 5, 12 e 13; 8, 15 e 17 ed esaminiamone una caratteristica comune, nota fin dall'antichità.

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

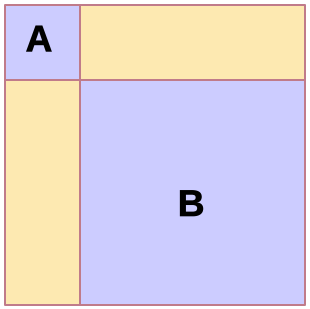
$$8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$$

Cioè: la somma dei quadrati dei numeri più piccoli è uguale al quadrato del numero più grande.

Se osserviamo bene – possiamo provare noi stessi utilizzando del filo e tre paletti ai vertici di un triangolo – notiamo che tali numeri corrispondono alle misure (rispetto a qualsiasi unità di misura) dei lati di un triangolo rettangolo

Il teorema di Pitagora

Figura 1



Osserviamo le due figure: due quadrati uguali sono divisi in modi differenti. (figura 1 e figura 2)

Il quadrato a sinistra (figura 1) è diviso in due rettangoli uguali e nei quadrati A e B.

Il quadrato a destra (figura 2) è diviso in quattro triangoli rettangoli congruenti e nel quadrato C.

Ora la domanda che ci poniamo è: c'è una relazione fra i quadrati A, B e C?

Non si vede subito ….

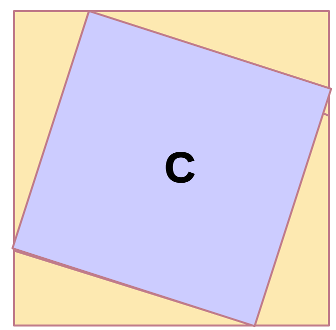


Figura 2

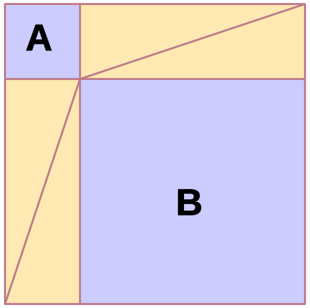


Figura 3

… ma se completiamo la divisione del 1° quadrato, come nella figura 3 a lato, e confrontiamo questa con la figura 2 della slide precedente…

(Ciascuno dei due rettangoli è diviso a metà con una diagonale)

… Ora si vede: *se togliamo dal quadrato della figura 2 e da quello della 3 i quattro triangolini congruenti, quello che rimane deve avere la stessa area, ovvero:*

C = A + B

Osserviamo ancora la figura 3 e fissiamo l'attenzione su uno dei triangoli rettangoli; si vede che:

- il quadrato A è costruito sul cateto minore del triangolo;

-il quadrato B è costruito sul cateto maggiore del triangolo.

Se poi osserviamo la figura 2, vediamo che:

Il quadrato C è costruito sull'ipotenusa del triangolo.

Mettiamo insieme queste informazioni: possiamo costruire la figura 4, dove si vedono, sullo stesso triangolo, i tre quadrati A, B, C.

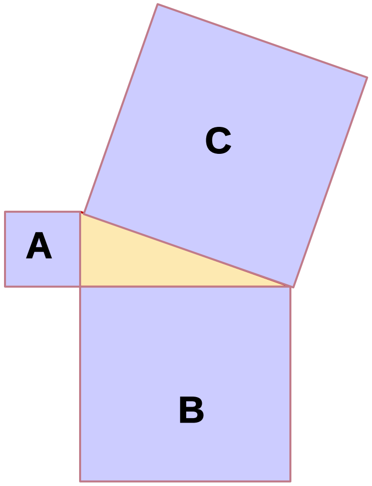


Figura 4

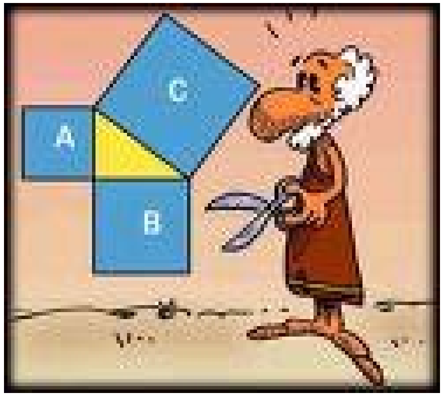
La proprietà che abbiamo scoperto è il teorema di Pitagora, il cui enunciato è quello che segue:

Teorema di Pitagora

In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti

o anche

In ogni triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti



La proprietà non era davvero prevedibile: in ogni triangolo rettangolo, grande, piccolo, con i cateti uguali, con i cateti di lunghezza molto diversa, *sempre* si verifica il fatto che il quadrato costruito sull'ipotenusa ha la stessa area della somma delle aree degli altri due.

Sempre: $C = A + B$

Formule applicative

In formule il teorema di Pitagora si traduce così:

$$\boxed{i^2 = C^2+c^2} \quad \text{ovvero} \quad \boxed{i = \sqrt{C^2+c^2}}$$

Con le formule inverse:

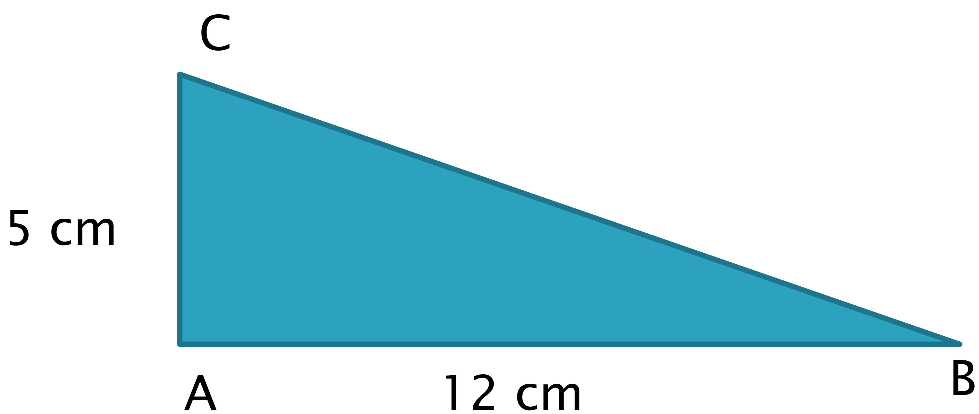
$$\boxed{C^2 = i^2-c^2} \quad \text{ovvero} \quad \boxed{C = \sqrt{i^2-c^2}}$$

$$\boxed{c^2 = i^2-C^2} \quad \text{ovvero} \quad \boxed{c = \sqrt{i^2-C^2}}$$

Dove
i = ipotenusa, C = cateto maggiore, c = cateto minore

Esempi e applicazioni

PROBLEMA 1. Un triangolo rettangolo ha i cateti di lunghezza rispettivamente 12 cm e 5 cm. Calcolare la lunghezza dell'ipotenusa.



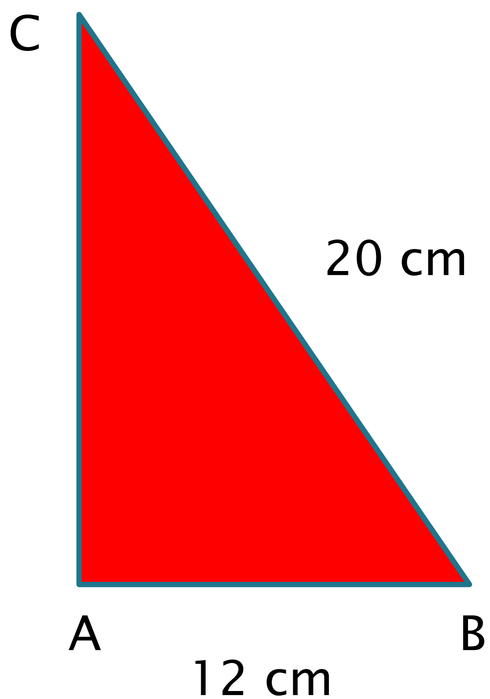
$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$

$$BC = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25}$$

$$= \sqrt{169} = 13cm$$

Esempi e applicazioni

PROBLEMA 2. Un triangolo rettangolo ha il cateto maggiore lungo12 cm e l'ipotenusa lunga 20 cm. Calcolare la lunghezza dell'altro cateto.

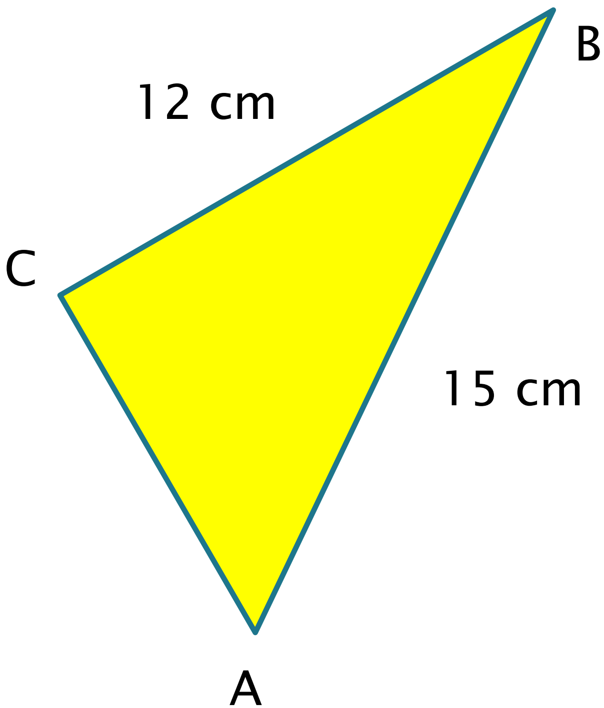


$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$$

$$AC = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16cm$$

Esempi e applicazioni

PROBLEMA 3. Un triangolo rettangolo ha il cateto maggiore lungo12 cm e l'ipotenusa lunga 20 cm. Calcolare la lunghezza dell'altro cateto.



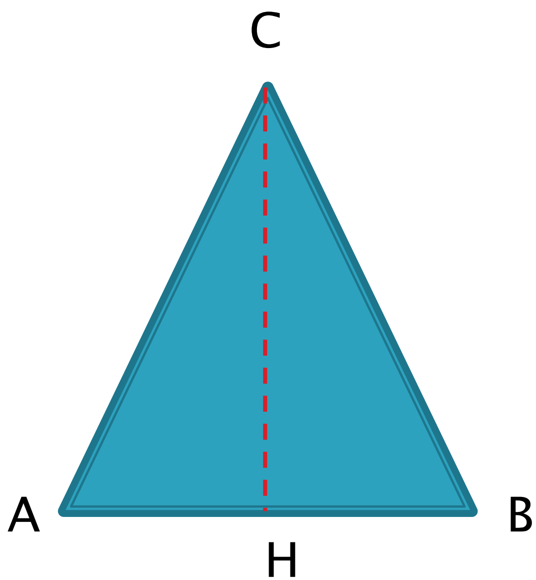
$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$$

$$AC = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9cm$$

Applicazioni del Teorema alle figure geometriche più comuni

DOMANDA: ma se il teorema di Pitagora è applicabile SOLO ai triangoli rettangoli, posso usarlo in altre figure geometriche?
Beh, la risposta è semplice: è sufficiente scomporre le figure in modo da ottenere triangoli rettangoli. Ed ora vedremo le principali.

- Triangolo isoscele: <u>tracciamo l'altezza relativa alla base AB</u>



$$l = \overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2}$$

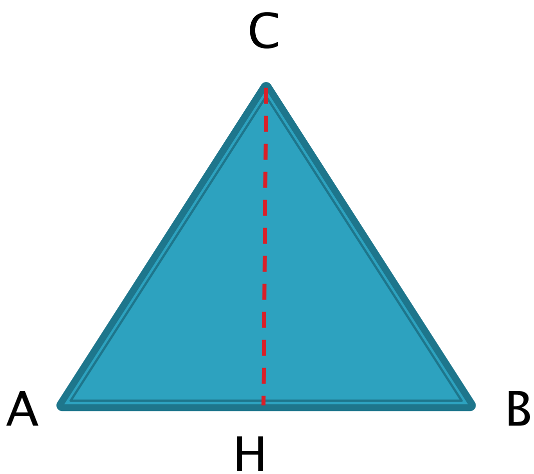
$$h = \overline{CH} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\frac{b}{2} = \overline{AH} = \sqrt{l^2 - h^2}$$

Applicazioni del Teorema alle figure geometriche più comuni

- Triangolo equilatero: <u>tracciamo l'altezza relativa a qualunque lato</u>

$$h = \overline{CH} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{4l^2 - l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$



Da cui ricaviamo

$$h = \overline{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

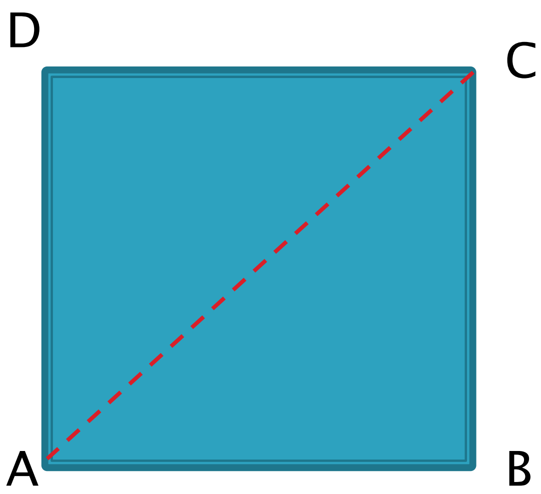
$$l = \frac{2 \cdot h}{\sqrt{3}}$$

dove possiamo considerare $\sqrt{3} = 1,732$

Applicazioni del Teorema alle figure geometriche più comuni

- Quadrato: <u>tracciamo la diagonale</u>

$$d = \overline{AC} = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$



Da cui ricaviamo

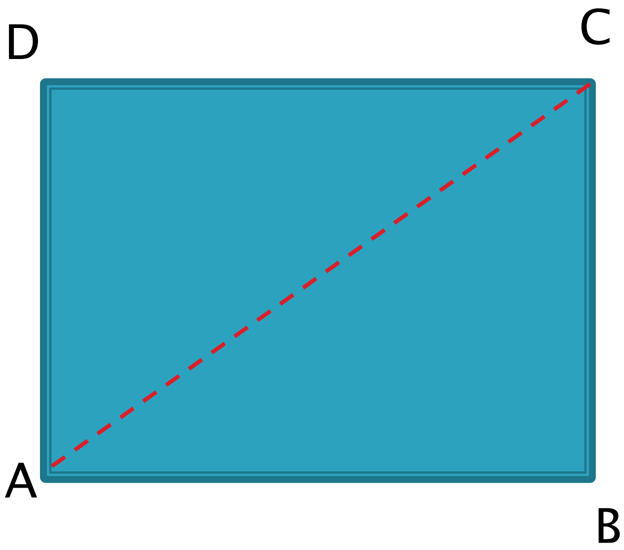
$$d = \overline{AC} = l\sqrt{2}$$

$$l = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

dove possiamo considerare $\sqrt{2} = 1,414$

Applicazioni del Teorema alle figure geometriche più comuni

- Rettangolo: <u>tracciamo la diagonale</u>



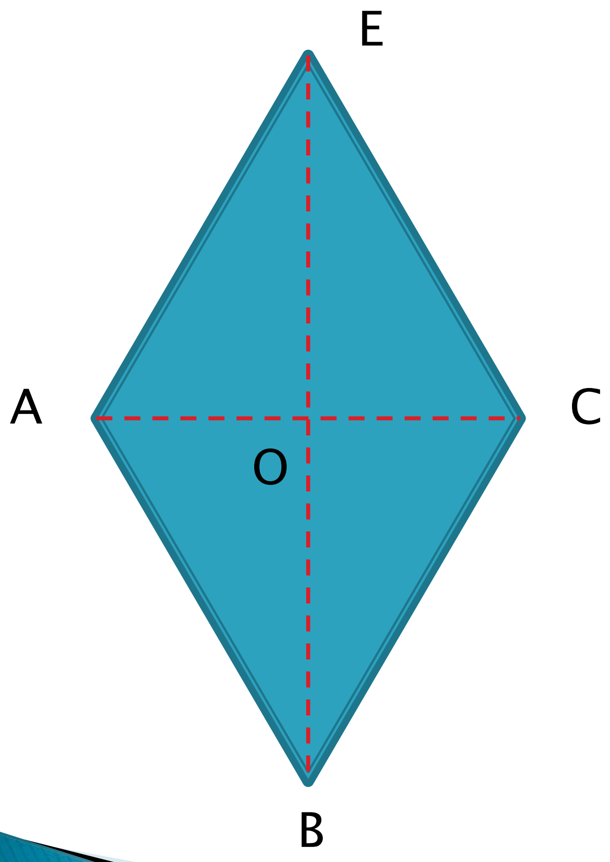
$$d = \overline{AC} = \sqrt{b^2 + h^2}$$

$$b = \overline{AB} = \overline{CD} = \sqrt{d^2 - h^2}$$

$$h = \overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{d^2 - b^2}$$

Applicazioni del Teorema alle figure geometriche più comuni

- Rombo: <u>tracciamo le due diagonali</u>



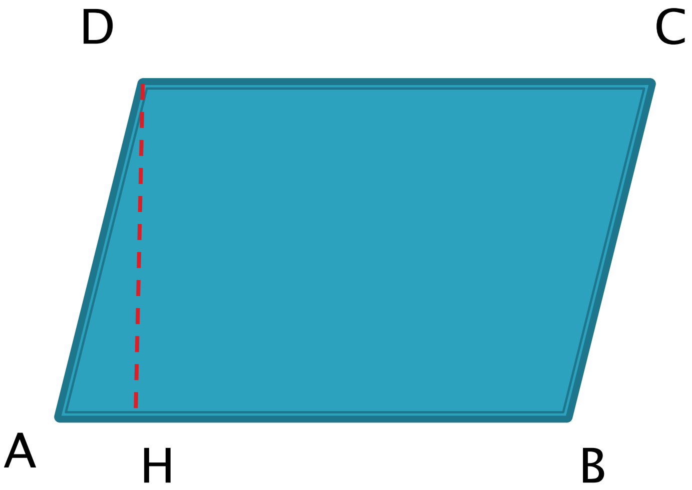
$$l = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CE} = \overline{AE} = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$\frac{d}{2} = \overline{AO} = \overline{OC} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

$$\frac{D}{2} = \overline{BO} = \overline{OE} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Applicazioni del Teorema alle figure geometriche più comuni

- Parallelogramma: <u>tracciamo l'altezza relativa alla base</u>



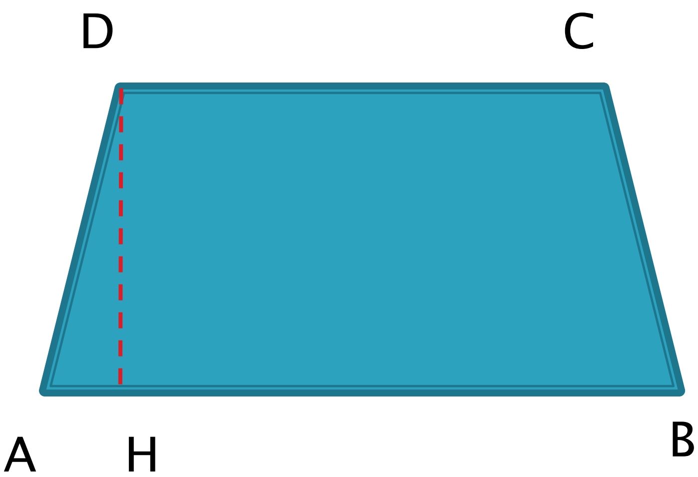
$$l = \overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{h^2 + \overline{AH}^2}$$

$$h = \overline{DH} = \sqrt{l^2 - \overline{AH}^2}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{l^2 - h^2}$$

Applicazioni del Teorema alle figure geometriche più comuni

- Trapezio isoscele: <u>tracciamo l'altezza relativa alla base</u>



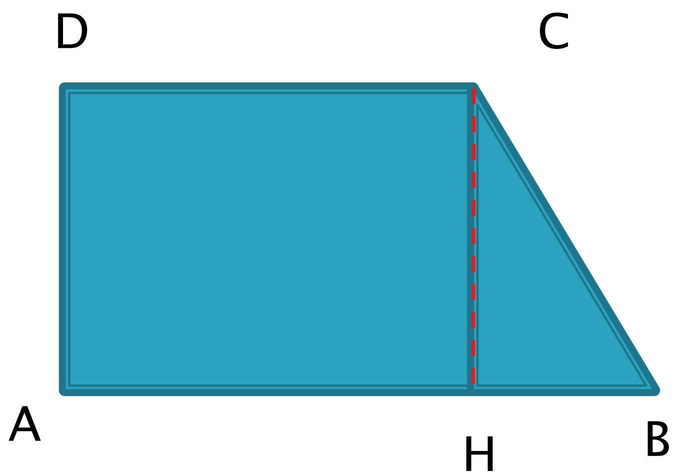
$$l = \overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{h^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\overline{AB} - \overline{BC}}{2}\right)^2}$$

$$h = \overline{DH} = \sqrt{l^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{\overline{AB} - \overline{BC}}{2}\right)^2}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{l^2 - h^2}$$

Applicazioni del Teorema alle figure geometriche più comuni

- Trapezio rettangolo: <u>tracciamo l'altezza CH</u>



$$l = \overline{BC} = \sqrt{h^2 + \overline{BH}^2} = \sqrt{h^2 + \left(\overline{AB} - \overline{BC}\right)^2}$$

$$h = \overline{CH} = \overline{AD} = \sqrt{l^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{l^2 - \left(\overline{AB} - \overline{BC}\right)^2}$$

$$\overline{BH} = \sqrt{l^2 - h^2}$$

Applicazioni del Teorema alle altre figure geometriche…

Per poter applicare il teorema di Pitagora ad altre figure geometriche è sufficiente ricavare all'interno della figura uno o più triangoli rettangoli tracciando in modo opportuno segmenti perpendicolari …..

…. Ed ora sta a voi applicare quanto imparato ….

BUON LAVORO!!